

Generoivat funktiot

Olli Opiskelija

Sisältö

1	Johdanto	2
2	Generoivat funktiot	3
3	Todennäköisyysgeneroiva funktio	4
4	Momenttgeneroiva funktio	5

Luku 1

Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä todennäköisyys- ja momenttigeneroivia funktioita. Yleisesti generoiva funktio on hyödyllinen esimerkiksi kombinatoriikassa. Matemaatiikan yliopisto-opinnoissa generoivat funktiot tulevat yleensä ensimmäisen kerran tutuiksi todennäköisyyslaskennan kursseilla.

Luku 2

Generoivat funktiot

Generoiva funktio on potenssisarja, joka määritellään seuraavasti:

Määritelmä 2.1. *Generoiva funktio* lukujonolle $(a_k)_{k=0}^\infty$ on

$$(2.2) \quad a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Todennäköisyysgeneroiva funktio on määritelty ainoastaan diskreeteille jakaumille, mutta momenttgeneroiva funktio on määritelty sekä diskreeteille että jatkuville jakaumille. Jakaumien ominaisuuksien tutkimisessa generoivat funktiot ovat monella tapaa hyödyllisiä. Näin on esimerkiksi siksi, että generoiva funktio määrää jakauman yksikäsitteisesti. Generoivien funktioiden avulla voidaan laskea jakaumien tunnuslukuja, odotusarvot, varianssit ja momentit. Lisäksi niitä voidaan käyttää riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakautumisen tutkimiseen.

Tutkielma on rakennettu siten, että ensin esittelen todennäköisyysgeneroivan funktion ja todistan sen ominaisuuksia luvussa 3. Luvussa 4 esittelen momenttgeneroivat funktiot diskreeteille ja jatkuville jakaumille sekä todistan niihin liittyviä ominaisuuksia. Oletan tunnetuksi tavallisimmat todennäköisyyslaskentaan liittyvät käsitteet, ks. [4].

Luku 3

Todennäköisyysgeneroiva funktio

Määritelmä 3.1. Jos X on diskreetti satunnaismuuttuja, joka saa arvokseen luonnollisia lukuja, niin X :n *todennäköisyysgeneroiva funktio* on

$$(3.2) \quad G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)t^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k.$$

Mikäli X :n arvojoukko on äärellinen ja arvojoukon jäsenten todennäköisyydet ovat nolasta poikkeavia, G_X on määritelty kaikilla reaaliluvuilla t . Muutoin G_X on määritelty ainoastaan niille $t \in \mathbb{R}$, joilla G_X suppenee. Koska pistetodennäköisyydet $p_k = P(X = k)$ ovat ei-negatiivisia ja summautuvat ykköseksi, sarja suppenee ainakin suljetulla välillä $t \in [-1, 1]$.

Generoiva funktio voidaan odotusarvon avulla ilmaista muodossa

$$(3.3) \quad G_X(t) = E(t^X).$$

Lause 3.4. Jos X on diskreetti satunnaismuuttuja, joka saa arvokseen luonnollisia lukuja, niin X :n todennäköisyysgeneroiva funktio määrää X :n jakauman yksikäsitteisesti.

Todistus. Koska määritelmän mukaan G_X on ainakin välillä $[-1, 1]$ suppeneva potenssi-sarja, niin sillä on kaikkien kertalukujen derivaatat ainakin välillä $(-1, 1)$ ja

$$p_k = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tästä näemme, että G_X määrää luvut p_k ja täten X :n jakauman yksikäsitteisesti. \square

Seuraavaksi esittelemme tutuimpien diskreettien jakaumien todennäköisyysgeneroivat funktiot. Jne...

Luku 4

Momenttigeneroiva funktio

Määritelmä 4.1. Jos X on satunnaismuuttuja ja odotusarvo $E(e^{tX})$ on olemassa, kun $|t| < \delta$, $\delta > 0$, niin X :n *momenttigeneroiva funktio* on

$$(4.2) \quad M_X(t) = E(e^{tX}).$$

Todennäköisyys- ja momenttigeneroivilla funktioilla on seuraava yhteys:

Lause 4.3. Jos X on diskreetti satunnaismuuttuja, jonka arvojoukko sisältyy joukkoon $\{0, 1, 2, \dots\}$, niin

$$M_X(t) = G_X(e^t)$$

edellyttäen, että G_X on olemassa, kun $|t| < 1 + \delta$, $\delta > 0$.

Todistus. Nyt

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E((e^t)^X) = G_X(e^t).$$

□

Ja niin edelleen...

Kirjallisuutta

- [1] Gustav Elfving ja Pekka Tuominen: Todennäköisyyslaskenta II, 2. painos, Limes ry, 1990.
- [2] Ilkka Holopainen: Mitta ja integraali, luentomoniste, Helsingin yliopisto, 2004.
- [3] Sheldon Ross: A First Course in Probability, 5th edition, Prentice-Hall, 1998.
- [4] Pekka Tuominen: Todennäköisyyslaskenta I, 5. painos, Limes ry, 2000.